

Übungsklausur Exponentialfunktion (Dinosaurier)

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Bestimme die Ableitung von f .

a) $f(x) = e^{3x+2}$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

2) Bestimme eine Stammfunktion von f .

$$f(x) = (e^{2x} - 3)^2$$

3) Bestimme die Lösungsmenge.

a) $2e^{2x+2} - 3 = -e^{2x+2}$

b) $e^x - 14 = 32e^{-x}$

4) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x - 2$.

a) Zeige, dass f streng monoton steigend ist.

b) Bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

c) Untersuche f auf Asymptoten und skizziere das Schaubild von f .

d) Das Schaubild von f und die Koordinatenachsen schließen eine Fläche ein. Wie groß ist der Inhalt dieser Fläche?

5) Pflanzliche Zellen nehmen neben normalem Kohlenstoff auch radioaktiven Kohlenstoff ^{14}C auf. Wenn die Pflanze stirbt, wird kein weiterer Kohlenstoff mehr aufgenommen und der ^{14}C -Gehalt sinkt nach der Zerfallsfunktion $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,000121t}$.

(N_0 : Anzahl der ^{14}C Isotope zu Beginn des Zerfalls, t : Zeit in Jahren)

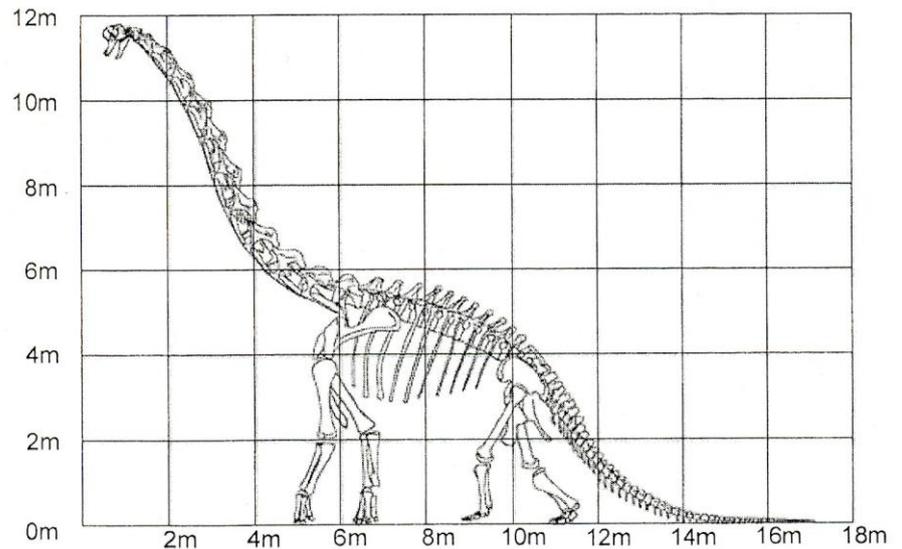
Mit dieser Funktion ist es möglich für Hölzer und andere Materialien pflanzlichen Ursprungs Altersbestimmungen durch Messungen des ^{14}C -Gehalts vorzunehmen (Radiokarbonmethode).

Jesaja, einer der großen Propheten des Alten Testaments, hat im 8. Jahrhundert vor Christus gelebt. An einem historischen Exemplar des „Buches von Jesaja“ hat man noch einen ^{14}C -Gehalt von 78,5% des Anfangsgehalts gemessen. Ist dieses Exemplar echt? (Hinweis: $\ln 0,785 = -0,242$)

Übungsklausur Exponentialfunktion (Dinosaurier)

Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Das Skelett eines ausgewachsenen Brachiosauriers, das im Museum für Naturkunde in Berlin ausgestellt ist, wurde von der TU Berlin vermessen und grafisch aufgearbeitet (Grafik siehe links).



- a) Der Saurier soll möglichst naturgetreu nachgebildet werden.

Dazu wird der Schwanz des Sauriers mit Hilfe einer Exponentialfunktion modelliert.

Bestimme die Exponentialfunktion der Form $f(x) = c \cdot a^x$, die den Schwanzbereich ($x \in [11; 17]$) möglichst gut beschreibt.

Verwende hierzu die Punkte $P(11|3)$ und $Q(14|0,375)$ des Schwanzes.

- b) In der Spielzeugindustrie werden Modelle des Brachiosauriers hergestellt. Eine Handelskette kauft 10000 Dinos. Die pro Monat verkauften Dinos können mit der Funktion $g(t) = 275 \cdot t \cdot e^{-0,125t}$ (t in Monaten) berechnet werden. Bestimme rechnerisch, wann die meisten Dinos verkauft werden. Wie viele Dinos werden dann verkauft?

- c) Die Dinos werden zu einem Preis von 5€ pro Stück verkauft. Aufgrund der großen Nachfrage sinkt der Verkaufspreis pro Monat um 25Cent. Stelle eine Umsatzfunktion $u(t)$ auf, mit der die Einnahmen pro Monat aus dem Verkauf der Dinos berechnet werden können.

- d) (1) Zeige, dass man die Anzahl der verkauften Dinos mit $G(t) = 17600 - 17600e^{-0,125t} - 2200te^{-0,125t}$ berechnen kann.
 (2) Nach 15 Monaten beschließt der Abteilungsleiter jeden Monat 600 weitere Dinos einzukaufen. Mit welcher Funktion $H(t)$ kann man für $t \geq 15$ die vorhandenen Dinos berechnen?

Übungsklausur Exponentialfunktion (Dinosaurier)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f'(x) = 3 \cdot e^{3x+2}$

b) $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 e^{-x}$

2) $f(x) = e^{4x} - 6e^{2x} + 9$

$$F(x) = \frac{1}{4}e^{4x} - 3e^{2x} + 9x$$

3) a) $3e^{2x+2} = 3 \Leftrightarrow e^{2x+2} = 1 \Leftrightarrow 2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow L = \{-1\}$

b) $e^{2x} - 14e^x - 32 = 0$

Substitution: $u = e^x$

$$u^2 - 14u - 32 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = 7 \pm 9$$

$$u_1 = 16 \Rightarrow x = \ln 16, \quad u_2 = -2 \Rightarrow k.L. \Rightarrow L = \{\ln 16\}$$

4) a) $f'(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

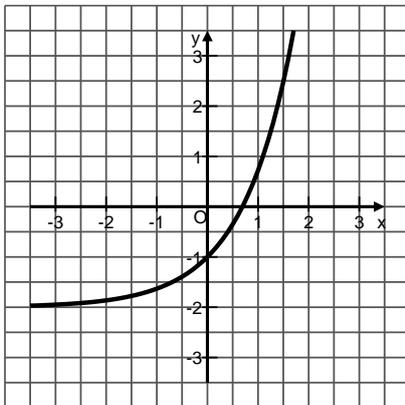
b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \quad N(\ln 2 / 0)$

$$y = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 \quad S(0 / -1)$$

c) Für $x \rightarrow \infty$ gilt: $f(x) \rightarrow \infty$

Für $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow -2 \Rightarrow y = -2$ ist waagerechte Asymptote für $x \rightarrow -\infty$.

Da für x alle möglichen Zahlen eingesetzt werden können, hat das Schaubild von f keine senkrechten Asymptoten.



$$d) A = \left| \int_0^{\ln 2} (e^x - 2) dx \right| = \left| \left[e^x - 2x \right]_0^{\ln 2} \right| = \left| e^{\ln 2} - 2 \ln(2) - e^0 \right| = \left| 2 - 2 \ln(2) - 1 \right| = 2 \ln(2) - 1$$

5) $0,785N_0 = N_0 \cdot e^{-0,000121t}$

$$\ln 0,785 = -0,000121t$$

$$-0,242 = -0,000121t$$

$$t = 2000$$

Das Exemplar ist eine Fälschung, da Jesaja vor ca. 2750 Jahren gelebt hat.

Übungsklausur Exponentialfunktion (Dinosaurier)

Lösungen Wahlteil:

a)

$$(I) \quad f(11) = 3 = c \cdot a^{11} \Rightarrow c = \frac{3}{a^{11}}$$

$$(II) \quad f(14) = 0,375 = c \cdot a^{14}$$

$$\text{Setze (I) in (II) ein: } 0,375 = \frac{3}{a^{11}} \cdot a^{14} = 3 \cdot a^3 \Rightarrow a = 0,5$$

$$a = 0,5 \text{ in (I): } c = 6144 \Rightarrow \boxed{f(x) = 6144 \cdot 0,5^x}$$

$$b) \quad g'(t) = 275 \cdot e^{-0,125t} + 275t \cdot e^{-0,125t} \cdot (-0,125) = (275 - 34,375t) \cdot e^{-0,125t}$$

$$g''(t) = -34,375 \cdot e^{-0,125t} + (275 - 34,375t) \cdot e^{-0,125t} \cdot (-0,125) = (-34,375 - 34,375 + 4,296875t) \cdot e^{-0,125t}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow (275 - 34,375t) \cdot e^{-0,125t} = 0 \Rightarrow 275 - 34,375t = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = 8}$$

$$g''(8) = (-34,375 - 34,375 + 4,296875 \cdot 8) \cdot e^{-0,125 \cdot 8} \approx -12,65 < 0 \Rightarrow \boxed{H(8 \mid 809,3)}$$

mit $g(8) \approx 809,3$

\Rightarrow Im 8ten Monat werden am meisten Dinos verkauft.

Es werden in diesem Monat 809 Dinos verkauft.

$$c) \quad u(t) = g(t) \cdot (5 - 0,25t) = 275 \cdot t \cdot e^{-0,125t} \cdot (5 - 0,25t)$$

d) (1) Zeige: (I) $G'(t) = g(t)$ und (II) $G(0) = 0$

$$(I) \quad G'(t) = 2200e^{-0,125t} - 2200e^{-0,125t} + 176te^{-0,125t} = 176te^{-0,125t} = g(t)$$

$$(II) \quad G(0) = 17600 - 17600 = 0 \text{ (keine Dinos zu Beginn verkauft)}$$

$$(2) \quad H(t) = 10000 + 600(t - 15) - G(t) \quad \text{für } t \geq 15$$